Разбор вступительных заданий направления точных наук

Математика

Часть 1

Перечисли все способы, которыми можно поделить квадрат на 3 подобных[1] между собой прямоугольника[2].

Часть 2

В каждом случае найди явно отношение сторон этих прямоугольников — проделай все необходимые вычисления.

Часть 3

В каком из случаев ответ выглядит намного сложнее остальных? Предположи, какая отличительная черта разбиения на это влияет. Проверь свою гипотезу, решив аналогичную задачу разделения квадрата на 4 подобных прямоугольника.

Решение

Части 1 и 2

Перечисли все способы, которыми можно поделить квадрат на 3 подобных между собой прямоугольника.

В каждом случае найди явно отношение сторон этих прямоугольников — проделай все необходимые вычисления.

[1] Два прямоугольника называют подобными, если отношение большей стороны первого к большей стороне второго равно отношению меньшей стороны первого к меньшей стороне второго.

[2] Способы, отличающиеся только поворотом и/или отражением квадрата, считай за один.

Напомним, что два прямоугольника подобны, если стороны первого относятся друг к другу так же, как стороны второго.

Все возможные разрезания квадрата можно поделить на две группы **I** и **II** (см. рис. 1). Действительно, к верхней стороне квадрата могут примыкать три, два или один прямоугольник. Если их три, то получается конфигурация вида I. Если два, то – конфигурации вида II. Если же к верхней стороне примыкает лишь один прямоугольник, то два других располагаются под ним, а их общая сторона либо горизонтальна (что эквивалентно I), либо вертикальна (что эквивалентно II).

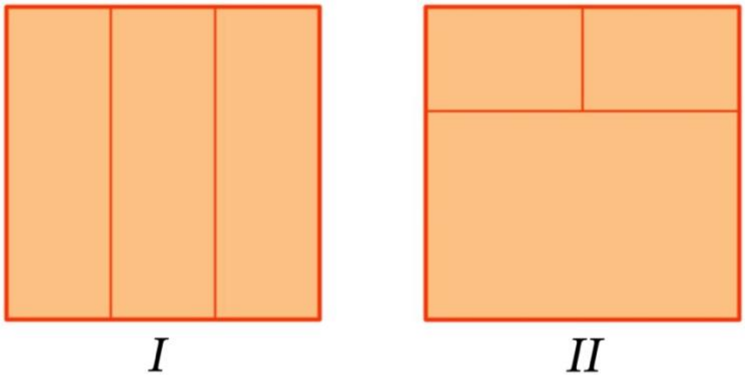


Рис. 1.

Рассмотрим группу ***I****.* Из расположения прямоугольников становится очевидно, что их бо́льшие стороны равны [стороне квадрата] – а для того, чтобы достигалось подобие, нужно, чтобы и меньшие стороны соотносились друг к другу так же, т.е. тоже были равны [1/3 стороны квадрата]. Таким образом, эта конфигурация представляет собой разбиение на три равных прямоугольника, причем стороны такого прямоугольника относятся друг к другу как 1 : 3.

Рассмотрим группу ***II****.* Назовем *ориентацией* прямоугольника направление его более длинной стороны. Как могут быть ориентированы два верхних прямоугольника?

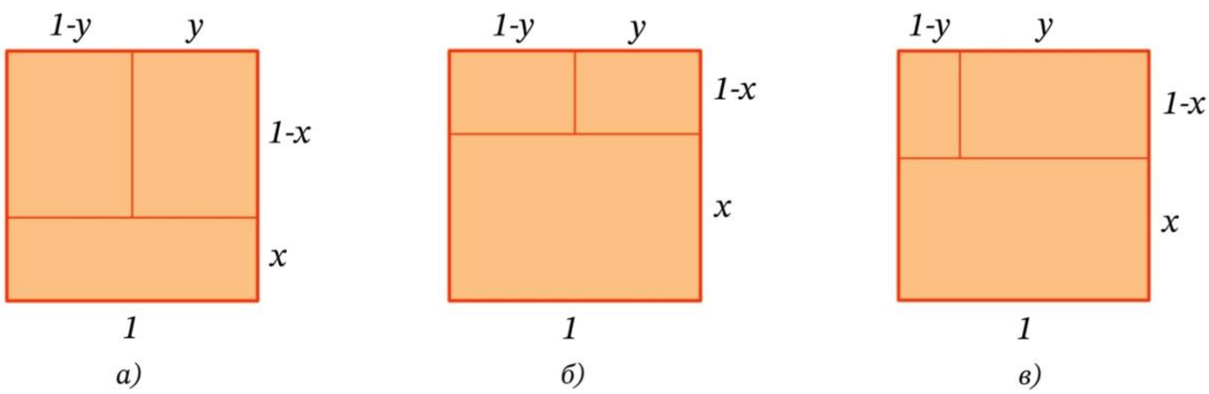


Рис. 2. Верхние прямоугольники могут быть ориентированы либо оба вертикально (а); либо оба горизонтально (б); либо один вертикально, а другой — горизонтально (в).

Случай (а). *Оба верхних прямоугольника ориентированы вертикально.* По условию прямоугольники попарно подобны друг другу. Отсюда, с учетом обо- значений, введенных на рис. 2 (а), можем составить систему уравнений:

$$\frac{1-y}{1-x} = \frac{y}{1-x} = \frac{x}{1}.$$

Из первого равенства следует, что $y = 1-y$, следовательно, $y = 1-y = \frac{1}{2}$. Тогда подставим это значение во второе равенство, получим квадратное уравнение

$$x^2 - x + \frac{1}{2} = 0.$$

Дискриминант такого уравнения $D = 1 - 4 \cdot \frac{1}{2} = -1 < 0$ – действительных корней нет. Значит, случай (а) невозможен.

Случай (б). *Оба верхних прямоугольника ориентированы горизонтально.* По условию прямоугольники попарно подобны друг другу. Отсюда, с учетом обозначений, введенных на рис. 2 (б), можем составить систему уравнений:

$$\frac{1-x}{1-y} = \frac{1-x}{y} = \frac{x}{1}.$$

Из первого равенства следует, что $y = 1-y$, следовательно, $y = 1-y = \frac{1}{2}$. Тогда подставим это значение во второе равенство, получим линейное уравнение

$$2 \cdot (1 - x) = x.$$

Решением является $x = 2/3$. Значит, в случае (б) стороны каждого из прямоугольников соотносятся друг с другом как 2 : 3.

Случай (в). *Один из верхних прямоугольников ориентирован вертикально, другой — горизонтально.* По условию прямоугольники попарно подобны друг другу. Отсюда, с учетом обозначений, введенных на рис. 2 (в), можем составить систему уравнений:

$$\frac{1-y}{1-x} = \frac{1-x}{y} = \frac{x}{1}.$$

Из второго равенства выразим $y = \frac{1-x}{x}$. Тогда подставим это выражение в первое равенство, получим следующее уравнение 3-ей степени:

$$(1-x) \cdot x + \frac{1-x}{x} = 1.$$

Приведем его к стандартному виду, домножив обе части на *x*:

$$x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Так как в задаче требуется проделать все вычисления, то необходимо, в частности, расписать решение уравнения 3-й степени. Для этого воспользуемся формулой Кардано.

Приведем уравнение к каноническому виду $y^3 + py + q = 0$, осуществив замену переменной:

$$x = y + \frac{1}{3}.$$

Получим следующее уравнение:

$$y^3 + \frac{5}{3} \cdot y - \frac{11}{27} = 0.$$

У такого уравнения один действительный корень, найти его можно по формуле Кардано:

$$y = \sqrt[3]{\frac{11}{54} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{\frac{11}{54} - \sqrt{Q}},$$

где $Q = \left(\frac{5}{9}\right)^3 + \left(-\frac{11}{54}\right)^2 = \frac{23}{108}$.

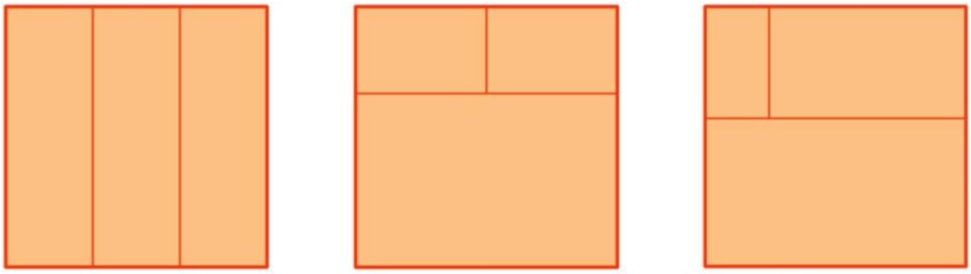
Таким образом, корень уравнения (1) равен

$$x = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{\frac{11}{54} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{11}{54} - \frac{\sqrt{69}}{18}},$$

то есть $x \approx 0.56984$.

Ответ

Возможны три разбиения:



а) б) в)

Соотношение сторон прямоугольников в случае:
а) 1 : 3,
б) 2 : 3,
в) ≈ 0.57 : 1

Часть 3

Наиболее сложным ответ к задаче выглядит в третьем случае, когда прямоугольники в разбиении ориентированы по-разному.

Действительно, проверим верность этой гипотезы на примере разбиения квадрата на 4 попарно подобных прямоугольника.

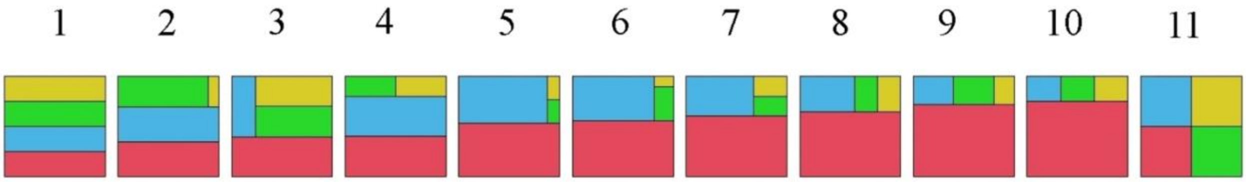


Рис. 3. Существует 11 различных разбиений квадрата на 4 подобных прямоугольника.

Расчет коэффициентов подобия для каждого из одиннадцати случаев ~~оставляем читателю в качестве упражнения~~ можно найти здесь.

Заметим, что объяснить разницу в ответах можно было и по-другому: сложность ответа в третьем случае могла бы быть обусловлена тем, что размеры всех прямоугольников разные, в то время как в остальных случаях хотя бы два прямоугольника равны. Однако вычисления опровергают правильность такой гипотезы — с точки зрения размеров, разбиения 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9 устроены одинаково: в них совпадает размер двух прямоугольников, но не совпадают с ним и между собой размеры двух других. В то же время рациональным отношение является только в случаях 4 и 7 — как раз тогда, когда все прямоугольники «лежат» на длинной стороне.

Критерии оценивания

№	**Критерий**	**Балл**
1	Найдены все три способа.	0-3
2	+ 1 балл – найдено отношение сторон в двух из трех случаев. Оно равно 1/3 для первого и 2/3 для второго разбиения. + 2 балла – выписано уравнение, определяющее отношение в третьем случае. Это уравнение $x(1 - x) + (1 - x)/x = 1.$ + 2 балла – применена формула Кардано, получено явное решение в радикалах: $$x = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{p}{60} - \frac{10}{3p}\right), \qquad p = (44 + 12\sqrt{69})^{1/3}.$$ Обратное отношение $1/x$ также засчитывается. Приближенное выражение $x \approx 0.57$ или $1/x \approx 1.75$ не приносит этих баллов: в задании явно требовалось проделать все необходимые вычисления, т.е. найти корень самостоятельно. Это нужно для того, чтобы заметить, что в третьем случае отношение сторон не является рациональным.	0-5
3	+1 балл – за утверждение о том, что в третьем случае ответ выглядит сложнее остальных (если в предыдущем пункте хотя бы выписано уравнение, дающее его). +1 балл – за утверждение о том, что в третьем случае ответ сложнее, потому что прямоугольники разного размера: они действительно разные, но критично не это, см. ниже. Если дан этот ответ, за этот пункт можно получить не более двух баллов. +2 балла – за утверждение о том, что в третьем случае ответ сложнее, потому что прямоугольники	0-7

	ориентированы по-разному. Если это утверждение ничем не обосновано, за этот пункт можно получить не более трех баллов. +4 балла – за проверку этого утверждения на разбиении квадрата на четыре подобных прямоугольника. Картинка здесь, расчет отношений здесь. Этот расчет подтверждает предположение о критичной роли одинаково ориентированных прямоугольников в разбиении, потому что с точки зрения размеров разбиения 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9 устроены одинаково: в них совпадает размер двух прямоугольников, но не совпадают с ним и между собой размеры двух других. В то же время рациональным отношение является только в случаях 4 и 7 – как раз тогда, когда все прямоугольники «лежат» на длинной стороне.	

Информатика

Интернет-поиск 90-х

Один из способов поиска подходящей страницы по запросу устроен так: сначала некий алгоритм принимает запрос (например: *“Hey Google! Could you tell me what inspired Lewis Carroll to write Alice in Wonderland?”*) и находит в нем ключевые слова (для примера выше: *“inspired”, “carroll”, “write”, “alice”, “wonderland”*). После чего другая программа принимает полученные ключевые слова и ищет страницы, в которых эти слова встречаются чаще всего.

Тебе предстоит написать на любом известном тебе языке программирования некоторые компоненты этого поиска.

Часть 1

Напиши функцию keyword_search, которая принимает на вход два аргумента. Первый аргумент — массив строк keywords, каждый элемент которого, — ключевое слово. Вторым аргументом является строка page. На выходе функция должна вернуть массив чисел, i-ый элемент которого равен числу повторений ключевого слова keywords[i] в тексте page. Смотри пример:

```
keywords = ["alice", "wonderland", "novel", "mirror"]
page = "Alice's Adventures in Wonderland is an 1865 English
        childrens novel by Lewis Carroll, a mathematics at
        Oxford University. It details the story of a young girl
        named Alice who falls through a rabbit hole into a
        fantasy world of anthropomorphic creatures.
        It is seen as an example of the literary nonsense genre."

answer = keyword_search(keywords, page) # здесь вызывается функция
print(answer)

>> [2, 1, 1, 0]

# пояснение: слово "alice" встречается в тексте page два раза,
#            "wonderland" и "novel" по одному разу, а "mirror"
#            в тексте не встречается.
```

Часть 2

Задача поисковика — выдавать пользователю наиболее релевантные страницы. Для этого каждой странице сопоставляют некоторое число, которое называют рангом страницы. Чем больше ранг, тем более релевантна страница. А дальше эти страницы просто сортируют по рангу и показывают пользователю несколько страниц с наибольшим рангом. Но как посчитать ранг? Придумай и реализуй алгоритм, который вычисляет ранг для текста на основе твоей функции keyword_search. Постарайся учесть следующие детали:

— Тексты страниц бывают разной длины. Если в более коротком тексте встретилось примерно столько же ключевых слов, сколько в более длинной, то короткая страница должна быть более релевантной.

— Если на странице часто упоминается одно из ключевых слов, а другие не встречаются совсем, то такая страница может оказаться нерелевантной. Например, если для keywords выше и некой страницы функция keyword_search выдала массив [10, 0, 0, 0], то, скорее всего, это страница про совсем другую Алису!

Часть 3

Наш поиск использует ключевые слова. Но как их сгенерировать? Попробуй придумать функцию, которая по строке запроса возвращает набор ключевых слов. Здесь, для простоты, работай с английским языком, где нет склонений и падежей. Учти, что предлоги, местоимения и многие часто употребляемые слова вряд ли окажутся ключевыми словами, даже если встречаются часто в запросе. Возможно, тебе захочется сначала проанализировать своей программой какие-нибудь большие тексты, чтобы собрать предварительные данные о типичной частоте слов.

Решение

В этом задании нет типового ответа, каждое решение оценивалось одинаково.

Отдельное спасибо тем, кто оставлял пояснения к коду!

Критерии оценивания

№	Критерий	Балл
1	+ 3 балла: - строчные и заглавные буквы, знаки препинания и прочие символы правильно обработаны (например, "Alice," засчитывается как ключевое слово "alice") - не учтены случаи, когда ключевое слово является частью другого слова (например, "chalice" не засчитывается как ключевое слово "alice") - функция выдаёт правильный ответ на всех тестах +2 балла: - допущена 1 или несколько ошибок, но на простом тексте программа выдаёт правильный ответ. простой текст - одна строка, все буквы строчные, кроме букв другие символы не используются 1 балл: - один балл получить нельзя -0 баллов: - на простом тексте программа выдаёт неверный ответ	0-3
2	+5 баллов - учтён объём страницы - учтена частота каждого из слов (в том числе разница между мин. и макс. частотой или несбалансированность) - алгоритм протестирован на нескольких текстах - код пояснён, описаны рассуждения +4 балла:	0-5

	- одно из условий выполнено, но с ошибкой +3 балла: - одно из условий не выполнено +2 балла: - одно из условий не выполнено, а в другом есть ошибка - либо два условия не выполнены +1 балл: - три условия не выполнены -0 баллов: - четыре условия не выполнены	
3	+2 балла: - собран список слов, которые не могут быть ключевыми (предлоги, местоимения и тд), путём анализа различных больших текстов +5 баллов: - строчные и заглавные буквы, знаки препинания и прочие символы правильно обработаны - не учтены случаи, когда ключевое слово является частью другого слова (например, "chalice" не засчитывается как ключевое слово "alice") - алгоритм протестирован на нескольких текстах - код пояснён, описаны рассуждения - собран список слов, которые не могут быть ключевыми(предлоги, местоимения и тд); объяснения, откуда слова взялись, нет	0-7

	+4 балла: - один пункт не выполнен или выполнен ошибочно +3 балла: - два пункта не выполнены или выполнены ошибочно +2 балла: - три пункта не выполнены или выполнены ошибочно +1 балл: - четыре пункта не выполнены или выполнены ошибочно -0 баллов: - пять пунктов не выполнены или выполнены ошибочно	

Физика

Часть 1

Начиная с момента времени t_0, к некоторому веществу подводится тепло. Зависимость температуры T этого вещества от времени t в данных условиях задаётся кривой, график которой изображён на рис. 2. Что происходит с веществом на каждом из трёх участков этой кривой? Почему на горизонтальных участках температура не изменяется? Какой смысл у температур T_0 и T_1? Мощность P подводимого тепла постоянна, т. е. количество тепла, которое сообщают веществу в единицу времени, не изменяется.

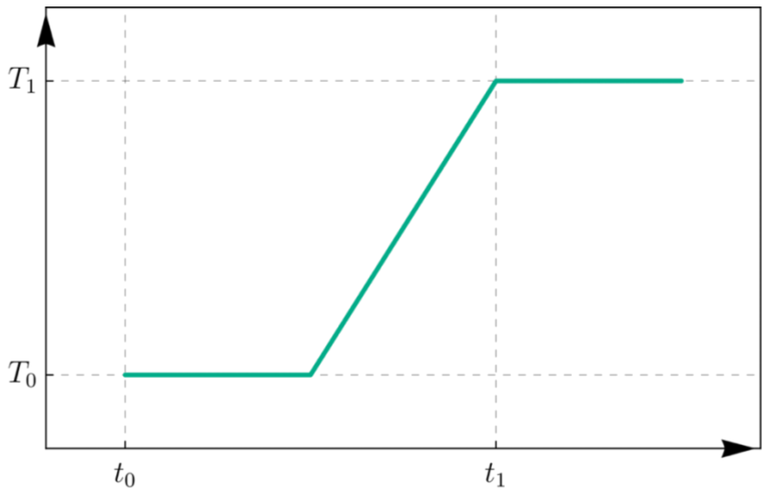


Рис. 2. Зависимость температуры от времени некоторого вещества

Часть 2

На практике любое вещество участвует в теплообмене со средой: вещество получает тепло, если его температура ниже температуры среды, и отдаёт, если выше. Например, если в жаркий день поставить на улицу стакан с холодной водой, тёплый воздух будет её нагревать (даже в тени!).

График на рис. 2 описывает ситуацию, в которой вещество нагревается источником тепла постоянной мощности. При этом теплообмен со средой в этой модели не учитывается. Как качественно изменится этот график, если теплообмен со средой будет учтён? Построй новый график на осях рис. 2, чтобы продемонстрировать разницу. Не производи никаких сложных расчётов! Изобрази только качественные изменения! Считай, что температура окружающей среды всё время равна T_0 и что вещество всё ещё достигает участка с температурой T_1 (и какое-то время на нём находится). Считай также, что количество тепла, которое вещество отдаёт в среду из-за теплообмена с ней, тем больше, чем больше разница температур между веществом и средой.

Часть 3

Теперь представь, что у тебя есть электрический чайник, воду в котором нагрели до T_0 = 80°C. Вы вместе с этим чайником находитесь в комнате с температурой воздуха $T_{\text{возд}}$ = 23°C. Из-за теплообмена с воздухом вода в чайнике остывает. В этом случае с хорошей точностью можно считать, что мощность тепловых потерь воды $P_{\text{т.п.}}(t)$ в момент времени t описывается формулой.

$$P_{\text{т.п.}}(t) = \frac{mc}{\tau}\left[T(t) - T_{\text{возд}}\right], \tag{1}$$

где m — масса воды, c — удельная теплоёмкость воды, а $T(t)$ — её температура в момент времени t. Параметр τ характеризует скорость теплообмена. Формула (1) выражает количество теплоты, которое в единицу времени теряет вода в чайнике из-за теплообмена с воздухом.

Считая, что зависимость температуры воды в чайнике от времени изображена на рис. 3, найди по графику, чему равно τ (так точно, как у тебя получится).

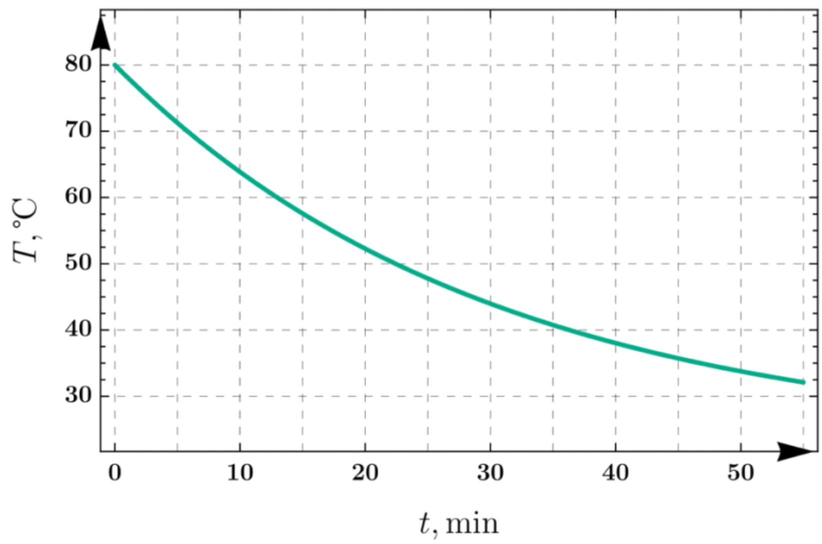


Рис. 3. Зависимость температуры воды в чайнике от времени при охлаждении из-за теплообмена со средой. Время здесь измеряется в минутах

Часть 4

Когда вода в твоём чайнике наконец охладилась до температуры воздуха в комнате, ты решаешь выйти на улицу, прихватив с собой чайник (и воду в нём!). На улице в этот момент температура воздуха опять оказалась равна $T_{возд}$ = 23°C. Ты ставишь чайник на лавочку. Поток тепловой энергии от Солнца W = 700 Вт/м^2 падает на боковую сторону чайника и полностью ей поглощается. Через некоторое (довольно продолжительное) время вода в чайнике нагреется до определённой температуры T и дальше не будет изменяться.

Чему равна эта температура? Для площади поверхности S боковой стороны чайника используй приблизительное значение (т. е. оцени эту величину для обычного электрического чайника). Считай, что теплообмен с воздухом описывается формулой (1), а масса воды в чайнике равна m = 1.7 кг. Для τ используй уже найденное тобой значение.

Если ты не силён/не сильна в теории, ты можешь ничего не считать и найти T экспериментально (в солнечный день)! В таком случае мы будем ждать от тебя фотографий термометра с показаниями температуры воды в разные моменты времени. Измерь также $T_{возд}$. Если $T_{возд}$ будет отличаться от 23°C, ничего страшного. Подойдёт и 0°C. Главное — чтобы было солнечно.

Часть 5

Какой мощностью P должен обладать электрический чайник, чтобы потери энергии на теплообмен со средой при кипячении воды были как можно меньше? Считай, что кипячение происходит в помещении и лучи Солнца на чайник не падают. Оцени, сколько Джоулей будет теряться на теплообмен с воздухом при нагреве 1.7 кг воды от 23°C до 100°C в самом мощном электрическом чайнике. Для τ используй ранее полученное тобой значение.

Решение

Часть 1

Что происходит с веществом на каждом из трёх участков этой кривой?

На первом участке **(I)** вещество плавится, т.е. переходит из твёрдого состояния в жидкое. На втором участке **(II)** вещество нагревается от температуры T_0 до температуры T_1. На третьем участке **(III)** вещество кипит, т.е. переходит из жидкого состояния в газообразное.

Почему на горизонтальных участках температура не изменяется?

Потому что на них происходят фазовые переходы первого рода: плавление и кипение. Такие переходы происходят при постоянной температуре.

Какой смысл у температур T_0 и T_1?

T_0 — температура плавления (при данных условиях), T_1 — температура кипения (при данных условиях).

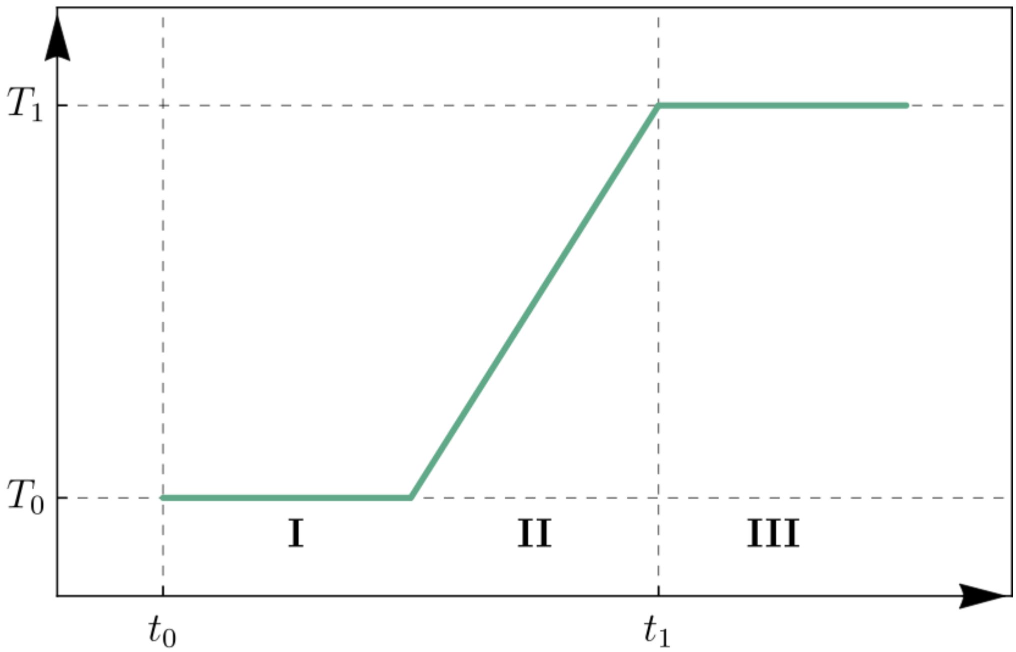


Рис. 1: Зависимость температуры от времени некоторого вещества.

Часть 2

Из-за теплообмена часть тепла, подводимого к веществу, будет отдана в среду. Это будет происходить только на участках **II** и **III**, потому что на участке **I** температуры вещества и среды одинаковы (значит, вещество не отдаёт тепло в среду). Качественных отличий у нового графика два:

- вещество достигнет температуры T_1 в более поздний момент времени, чем t_1,
- зависимость $T(t)$ на участке **II** будет описываться не прямой линией, а кривой, которая при росте t всё сильнее «загибается» вниз.

Первое отличие связано с тем, что часть подводимого к веществу тепла «потеряется» на нагрев среды. Второе — с тем, что эти потери усиливаются по мере роста температуры вещества (т.е. скорость нагрева уменьшается с увеличением t).

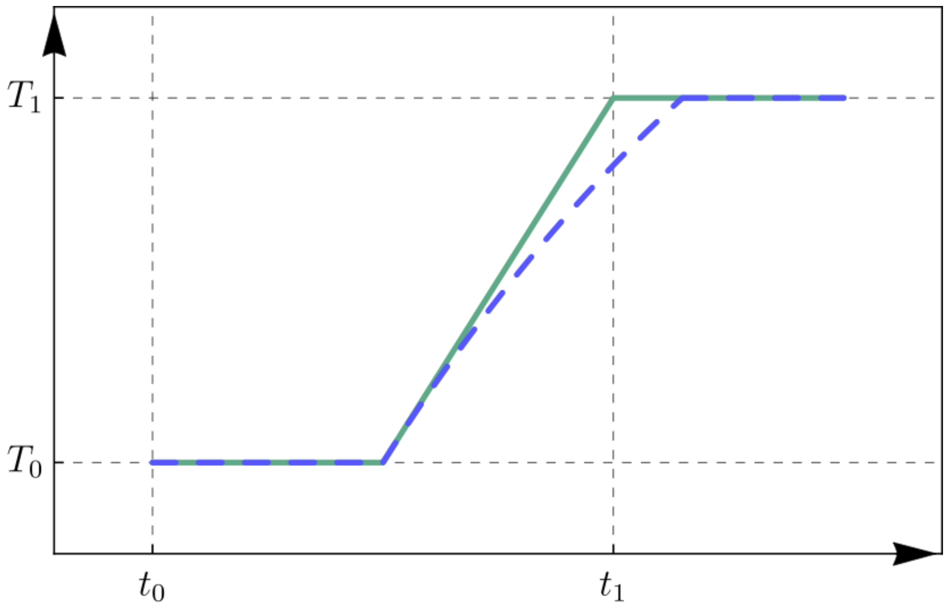


Рис. 2: Зависимость температуры от времени при учёте теплообмена со средой (кривая синего цвета соответствует учёту теплообмена).

Часть 3

По условию, мощность тепловых потерь воды $P_{\text{т.п.}}(t)$ в момент времени t описывается формулой

$$P_{\text{т.п.}}(t) = \frac{mc}{\tau}\left[T(t) - T_{\text{возд}}\right], \tag{1}$$

где m — масса воды, c — удельная теплоёмкость воды, а $T(t)$ — её температура в момент времени t. Пусть с момента времени t прошло время Δt. Если Δt достаточно мало, можно считать, что за это время температура воды изменилась не сильно. В таком случае общее количество теплоты ΔQ, отданное водой воздуху за время Δt, примерно равно $P_{\text{т.п.}}(t)\Delta t$. Это же количество теплоты можно выразить через разницу температур воды: $\Delta Q = mc\,[T\,(t) - T\,(t + \Delta t)]$. Приравнивая эти два выражения, получаем

$$\frac{T(t) - T_{\text{возд}}}{\tau} \approx \frac{T(t) - T(t+\Delta t)}{\Delta t}\,. \qquad (2)$$

В правой части этой формулы стоит коэффициент наклона секущей к графику $T(t)$. Его можно найти по этому графику, выбрав какие-нибудь t и t+Δt. Значение числителя дроби в левой части можно найти по этому же графику.

На графике на рис. 3 для t = 15 мин и $t + \Delta t$ = 25 мин температуры примерно такие: $T(t) \approx 58$°C и $T(t+\Delta t) \approx 48$°C. Подставляя эти значения и $T_{\text{возд}}$ = 23°C в формулу (2), получаем $\tau \approx 35$ мин. Если же взять t+Δt = 17.5 мин и $T(t+\Delta t) \approx 55$°C, получим $\tau \approx 29.2$ мин. Точное значение τ, использованное при построении графика на рис. 3: τ = 30 мин. Как видно, оба использованных приближения оказались достаточно неплохими. Второе из них лучше, потому что был выбран более маленький промежуток времени Δt.

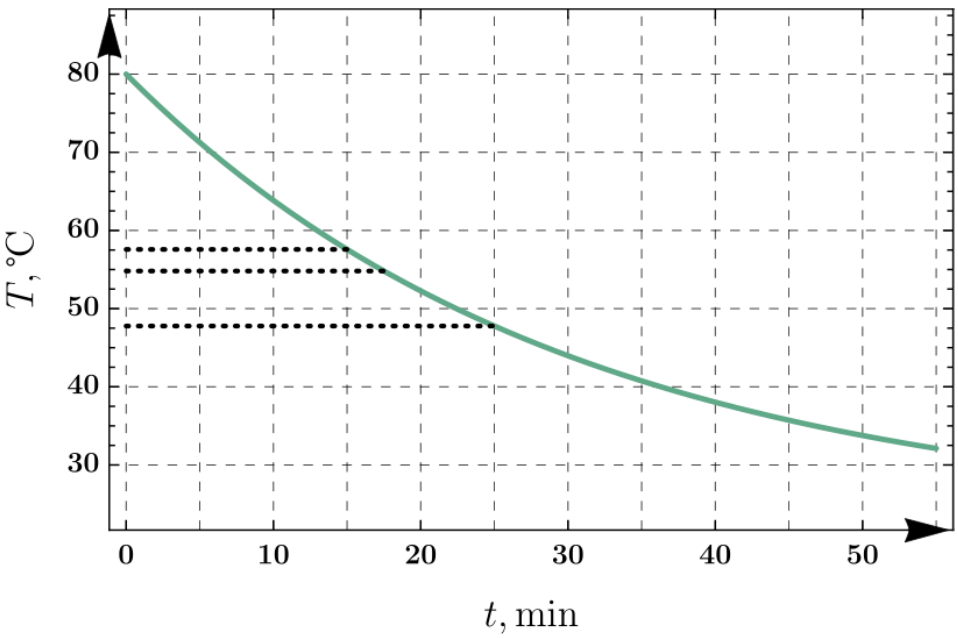


Рис. 3: Зависимость температуры воды в чайнике от времени при охлаждении из-за теплообмена со средой. Время измеряется в минутах. Дополнительные горизонтальные отрезки соответствуют 15, 17.5 и 25 мин.

Часть 4

Тепловое равновесие установится в тот момент, когда мощность поглощения тепла от Солнца WS сравняется с мощностью тепловых потерь $P_{\text{т.п.}}(t)$ из формулы (1). В этом случае температура $T(t)$ в данной формуле уже не будет меняться. Обозначая её за T_∞, находим

$$T_\infty = T_{\text{возд}} + \frac{WS\tau}{mc}\,. \tag{3}$$

Подставляя m = 1.7 кг, τ = 1800 с, W = 700 Вт/м^2, S = 0.02 м^2, c = 4200 Дж/(кг°С), получаем $T_\infty \approx 26.5$°С, что на три с половиной градуса выше температуры воздуха. Для очень яркого Солнца можно взять W = 1100 Вт/м^2, что даст $T_\infty \approx 28.5$°С.

Часть 5

Ответ на эту часть задачи легко получить, если уметь решать дифференциальные уравнения. Но мы решать дифференциальные уравнения не будем, а вместо этого немного потанцуем с бубном, что часто оказывается не менее полезным умением.

Какой мощностью P должен обладать электрический чайник, чтобы потери энергии на теплообмен со средой при кипячении воды были как можно меньше?

При нагревании температура воды в чайнике проходит через все промежуточные значения. Чем больше времени температура «задерживается» на этих промежуточных значениях, тем больше тепла теряется на нагрев воздуха. Поэтому для минимизации потерь нагрев должен осуществляться как можно быстрее. Следовательно, величина P должна быть как можно большей.

Оцени, сколько Джоулей будет теряться на теплообмен с воздухом при нагреве 1.7 кг воды от 23°С до 100°С в самом мощном электрическом чайнике. Для τ используй ранее полученное тобой значение.

При наличии теплообмена со средой график зависимости температуры воды от времени будет примерно таким, как на рис. 2. Нас интересует возрастающая часть синей кривой. Ясно, что без теплообмена она бы задавалась формулой

$$T(t) = T_{\text{возд}} + \frac{Pt}{mc}\,, \tag{4}$$

где $T_{\text{возд}}$ = 23°С. При наличии теплообмена справа появится какой-то дополнительный член. Точное выражение для него нам знать не нужно, а достаточно лишь хорошо приблизить его чем-то, что немного «загибается» вниз. Разумеется, для этого отлично сгодится функция $-\alpha t^2$, в которой коэффициент α нам предстоит подобрать. Итак, будем писать, что

$$T(t) \approx T_{\text{возд}} + \frac{Pt}{mc} - \alpha t^2\ . \qquad (5)$$

Для определения α напишем уравнение теплового баланса за период времени с t до $t + \Delta t$ (используя формулу (1)):

$$mc[T(t+\Delta t) - T(t)] \approx P\Delta t - \frac{mc}{\tau}\left[T(t) - T_{\text{возд}}\right]\Delta t. \qquad (6)$$

Подставим в это уравнение формулу (5) как для $T(t + \Delta t)$, так и для $T(t)$:

$$P\Delta t - 2\alpha mct\Delta t - \alpha mc(\Delta t)^2 \approx P\Delta t - \frac{mc}{\tau}\left[\frac{Pt}{mc} - at^2\right]\Delta t. \qquad (7)$$

Здесь мы сокращаем $P\Delta t$ и, учитывая, что Δt очень мало, пренебрегаем $(\Delta t)^2$. После деления на $-\Delta t$ получаем

$$2\alpha mct \approx \frac{mc}{\tau}\left[\frac{Pt}{mc} - at^2\right]. \qquad (8)$$

Поскольку P у нас большая и нас интересуют маленькие значения t, можно пренебречь ещё и t^2. Делая это, окончательно находим

$$a = \frac{P}{2mc\tau}, \qquad T(t) \approx\ T_{\text{возд}} + \frac{Pt}{mc} - \frac{Pt^2}{2mc\tau}. \qquad (9)$$

Далее считаем, что t — это момент времени, в который температура воды достигает 100°С. Количество теплоты, ушедшее на нагрев воздуха, выражается как

$$\delta Q = Pt - mc\left[T(t) - T_{\text{возд}}\right] \approx Pt - mc\left[\frac{Pt}{mc} - \frac{Pt^2}{2mc\tau}\right] = \frac{Pt^2}{2\tau}. \qquad (10)$$

Значение t мы можем приблизительно выразить из этого же уравнения, пренебрегая правой частью (она мала по сравнению с обоими членами, стоящими справа от первого знака равенства):

$$t \approx \frac{mc\left[T(t) - T_{\text{возд}}\right]}{P}, \qquad (11)$$

Объединяя последние две формулы, заключаем, что

$$\delta Q \approx \frac{m^2 c^2 \left[T(t) - T_{\text{возд}}\right]^2}{2P\tau}. \qquad (12)$$

Если подставить числа, считая P = 2000 Вт (весьма мощный чайник), получится $\delta Q \approx 42$ кДж. Если не танцевать с бубном, а провести все вычисления точно (т.е. решая дифференциальные уравнения), получится $\delta Q \approx 46.8$ кДж. А полное количество подведённого к воде тепла равно примерно 596.6 кДж.

Критерии оценивания

№	**Критерий**	**Балл**
1	Приведены правильные ответы на каждый из 3 вопросов Части 1.	0-3
2	+1 балл — построен график. +2 балла — установлены оба упомянутых в решении отличия.	0-3
3	+ 1 балл — придуман правильный способ нахождения τ. + 1 балл — полученное значение τ попало в сегмент [20,40]. + 1 балл — полученное значение τ попало в сегмент [25,35].	0-3
4	+ 2 балла — выведена формула (3). + 1 балл — ответ для T_∞ попал в сегмент [24.5,32]. Для тех, кто делал эксперимент: + 2 балла — эксперимент проведен качественно: сделано несколько измерений температуры воды в разные моменты времени, измерена температура воздуха. + 1 балл — T_∞ оказалось больше $T_{\text{возд}}$ хотя бы на полградуса.	0-3
5	+ 1 балл — дан ответ на вопрос про мощность. + 2 балла — дана оценка потерь.	0-3